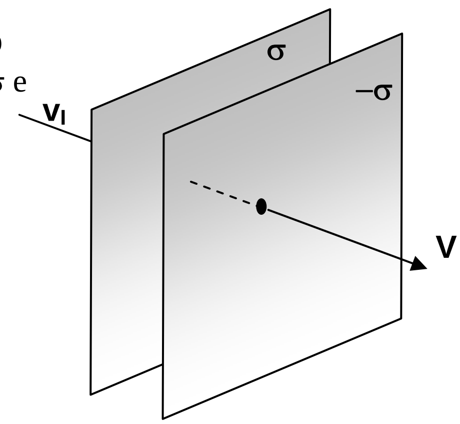
INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

1ª QUESTÃO) (2,5)

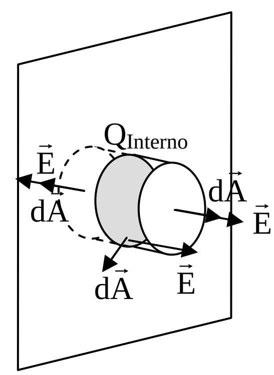
Duas placas isolantes muito grandes são posicionadas paralelas ao plano xy e estão carregadas com densidades superficiais de carga σ e $-\sigma$. A distância entre as placa é L. Elas possuem um pequeno furo, por onde passam íons, de massa **m** e carga positiva **q**, vindo da esquerda para a direita, como mostra a figura.



a) (1,0) Use a lei de Gauss para calcular o campo entre as placas.
b) (0,8) Calcule a diferença de potencial entre as placas.
c) (0,7) Mostre que cada íon tem um ganho de energia cinética de $\Delta K = q\sigma L/\varepsilon_0$, ao atravessar as placas.

GABARITO:

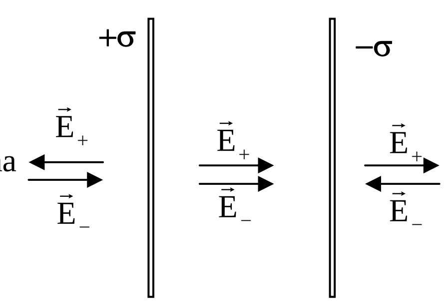
a) Sabemos que o campo elétrico em qualquer ponto do espaço é a soma do campo de todas as cargas que o geram naquela região. Calculando o campo elétrico gerado por uma placa saberemos o campo da outra e o total será a soma dos dois.
Por simetria o campo elétrico total gerado por uma placa infinita é perpendicular a ela e a uma mesma distância dela, o campo é homogêneo. Traçamos então uma gaussiana para aproveitar esta simetria, por exemplo, um cilindro, como está na figura. O campo elétrico é paralelo ao vetor área nas duas bases do cilindro e perpendicular na lateral. Como o campo é homogêneo nas bases, teremos:



$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \int_{BASES} \vec{E}.d\vec{A} = \int_{BASES} E.dA = 2E\int_{BASE} .dA = 2EA_{BASE} = \frac{Q_{Interno}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q_{Interno}}{2A_{BASE}}.$$

A área da região onde se encontra a carga interna tem a mesma área da base do cilindro, assim, $\sigma = \dfrac{Q_{Interno}}{A_{BASE}} \Rightarrow E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, onde σ é a densidade superficial de carga da placa. No desenho das duas placas verificamos que no interior o campo se soma e fora ele se subtrai, sendo assim o módulo nas duas regiões fora igual a zero e dentro $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

b) Como o campo elétrico entre as placas é homogêneo, a diferença de potencial entre as placas será: $V_- - V_+ = -\int_+^- E.dr = -\int_+^- \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}.dr = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}L$ **.**

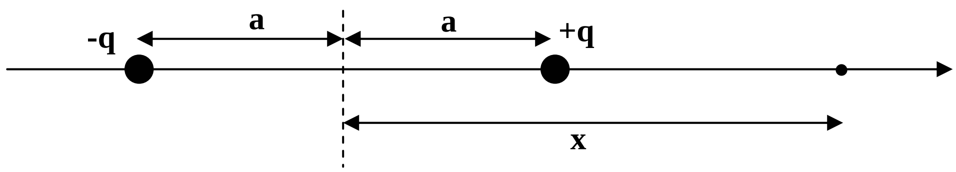


c) O Ganho de energia cinética do íon é igual à perda de energia potencial de uma placa até a outra, assim, $\Delta K = q\Delta V = q\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}L$

2ª QUESTÃO) (2,5)

Duas cargas iguais são posicionadas ao longo do eixo x, como mostra a figura.

a) (1,0) Calcule o potencial elétrico em qualquer ponto do eixo x, considerando o potencial no infinito zero.
b) (0,8) Faça a aproximação para x>>a e, a partir do valor do potencial neste limite, calcule o campo elétrico.
c) (0,7) Use o campo elétrico do item b e calcule o potencial para x>>a.



GABARITO:

a) O potencial total em qualquer ponto do eixo x será a soma do potencial das duas cargas, assim, considerando o potencial no infinito zero:

$$V(x) = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x+a|} \Rightarrow V(x>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^2-a^2}$$

b) Se fizermos x>>a na expressão do item anterior teremos $x^2 - a^2 \to x^2$, assim, $V(x>>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^2}$.

Como o potencial só varia com x a única componente do campo elétrico que não é nula é a componente x, desta forma,

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^3}$$

c) A relação entre a diferença de potencial em dois pontos do espaço e o campo elétrico nesta região é $V_B - V_A = -\int \vec{E}.d\vec{r}$. Fazendo o potencial no infinito zero, o potencial num ponto x>>a pode ser calculado usando a expressão do campo elétrico do item anterior,

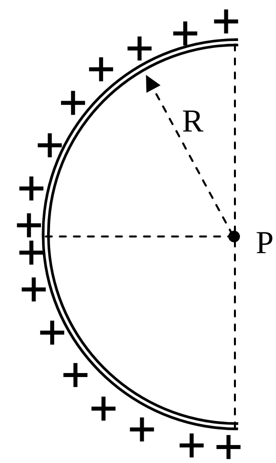
$$V(x) - V_\infty = -\int_\infty^x \vec{E}.d\vec{r} = -\int_\infty^r E.dr = -\int_\infty^x \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^3}.dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^2} \Rightarrow V(x>>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{x^2}$$

3ª QUESTÃO) (2,5)

Um fino bastão de vidro esta curvado num semicírculo de raio R. Uma carga +q está uniformemente distribuída ao longo da barra, como mostra a figura. Determine:

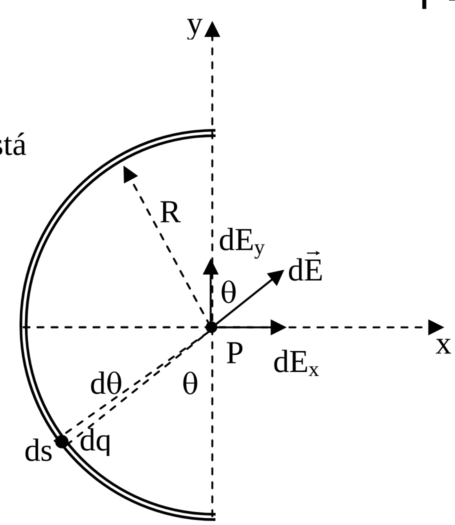
a) (1,5) o vetor campo elétrico no ponto P;

b) (1,0) o valor do potencial no ponto P, considerando a referência de potencial zero no infinito.



GABARITO:

a) Cada pequena carga dq que compõe a barra gera um campo elétrico no ponto P, que pode ser desmembrado em duas componentes, como mostra a figura ao lado, onde, $dE_x = dE\,\text{sen}\theta$ e $dE_y = dE\cos\theta$. Como dq pode ser considerado uma carga pontual $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$. A carga dq está distribuída no arco ds, compreendido pelo ângulo dθ, desta forma: $ds = R\,d\theta$. Podemos então relacionar $dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$, onde $\lambda = q/L$. As componentes do campo campo elétrico ficarão da forma,



$$dE_x = dE\,\text{sen}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\text{sen}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{R^2}\text{sen}\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\pi}\text{sen}\theta d\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{R^2}\cos\theta d\theta \Rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta = 0$$

. Nesta componente podemos usar também simetria para determinar seu valor. Para cada carga dq existe uma outra simetricamente oposta com relação ao eixo x, cuja soma da componente y se anula, assim $E_y = 0$.

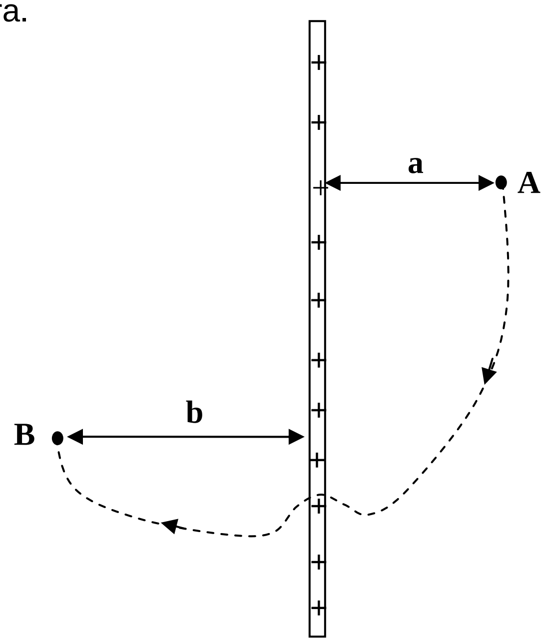
b) O potencial da carga pontual dq no ponto P será $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} \Rightarrow V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

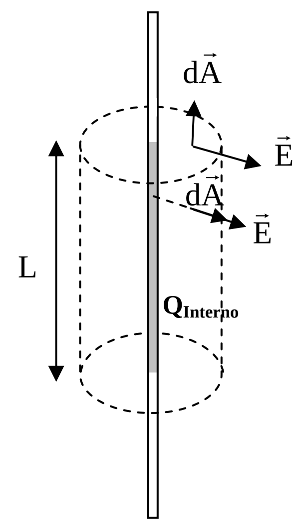
4ª QUESTÃO) (2,5)

Um fio reto, muito longo, está carregado com uma densidade linear de carga λ.

a) (1,5) Calcule o vetor campo elétrico a uma distância r do fio.

b) (1,0) Calcule o trabalho necessário para levar uma carga q do ponto A ao ponto B pelo caminho indicado na figura.

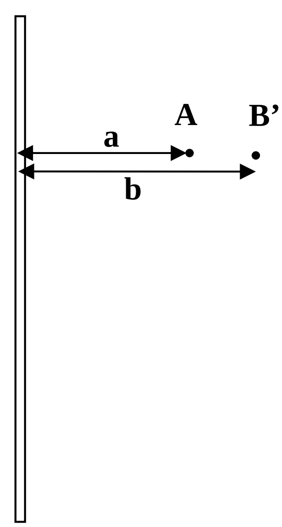




a) Como a distribuição das cargas é homogênea, por simetria, o campo elétrico é perpendicular ao fio e possui o mesmo módulo a uma mesma distância do centro da esfera. Traçando uma gaussiana cilíndrica de comprimento L, concêntrica com ao fio, em todos os pontos da lateral dela o campo elétrico será paralelo ao vetor área e terá o mesmo módulo, nas bases eles são perpendiculares e o fluxo será zero, assim:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \int_{LAT} \vec{E}.d\vec{A} = \int_{LAT} E.dA = E\int_{LAT} .dA = E2\pi rL = \frac{Q_{Interno}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{Interno}}{rL}\text{, onde}$$

$Q_{Interno}$ é a carga dentro da gaussiana, assim $Q_{Interno} = \lambda L \Rightarrow E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda L}{rL} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{r}$



b) Como o campo elétrico é perpendicular ao fio, as superfícies equipotenciais desta distribuição de cargas são cilindros concêntricos as fio, isto é, a uma mesma distância do fio o potencial é o mesmo.

O trabalho necessário para levar uma carga de A até B independe do caminho, depende somente das condições inicial e final. Se escolhermos um ponto de mesmo potencial na direção de A e calcularmos o trabalho para levar a carga de A até este ponto (que chamamos de B' no desenho), o valor do trabalho será o mesmo que levar de A até B.

$$W_{A-B'} = q(V_{B'} - V_A) = -q\int_a^b E.dr = -q\int_a^b \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}.dr = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$